NIVELAMENTO LEGO 2

AULA 4

MATRIZ TRANSPOSTA

$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{n \times m}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ troca

$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$A^T_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

PROPRIEDADES

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

MATRIZ IDENTIDADE

$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Note:

$I^T = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Além disso, a matriz identidade é o equivalente ao número 1 no contexto de matrizes. Trata-se do elemento neutro da multiplicação.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

MATRIZES SIMÉTRICAS

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

MATRIZ DIAGONAL (caso particular de matriz simétrica)

PROVA: A^TA é SIMÉTRICA (simples!)

Definição de simetria: $A = A^T$

Suponha que A^TA seja simétrica. Se isso é verdade, então

$A^TA = (A^TA)^T \Rightarrow A^TA = A^T(A^T)^T$

$\Rightarrow A^TA = A^TA$ ✓

De fato, observe:

$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{2\times3}$, $A^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}}_{3\times2}$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$= \begin{bmatrix} 3\cdot3+4\cdot4 & 2\cdot3+5\cdot4 & 3\cdot1+4\cdot6 \\ 2\cdot3+5\cdot4 & 2\cdot2+5\cdot5 & 2\cdot1+5\cdot6 \\ 1\cdot3+4\cdot6 & 1\cdot2+5\cdot6 & 1\cdot1+6\cdot6 \end{bmatrix}$

$= \underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 26 & 27 \\ 26 & 29 & 32 \\ 27 & 32 & 42 \end{bmatrix}}_{3\times3}$

MATRIZ INVERSA

$AA^{-1} = I \Rightarrow x \cdot x^{-1} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Isso, naturalmente, tem um parentesco com o assunto unidimensional.

COMO CALCULAR?

usamos a augmented matrix $[A|I]$

$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow [A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ daí performamos eliminação (Gauss-Jordan) até que o lado esquerdo seja a identidade. O lado direito, neste ponto, será A^{-1}

$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdot -\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdot 1/3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$

ou seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (A^{-1})

para verificar isso, basta fazer

$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esse é o método de Gauss-Jordan! Ele também nos permite encontrar x em $Ax = b$ (quando $Ax = b$ tem solução, evidentemente)

AGORA SIM! $A\vec{x} = \vec{b}$

Isso é um sistema de equações. Queremos achar o vetor $\vec{x}$ que faz as devidas combinações das colunas de A para encontrar $\vec{b}$. Ora, isso não é quase exatamente uma regressão? :)

A é nossa tabela de dados com as colunas, $\vec{b}$ é a variável resposta e $\vec{x}$ é o vetor de coeficientes

ALGUNS PONTOS: (multiplico por A^{-1} pela esquerda)

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (A^{-1})A\vec{x} = (A^{-1})\vec{b}$

$\Rightarrow I\vec{x} = (A^{-1})\vec{b}$ (quero isolar o $\vec{x}$)

$\Rightarrow \vec{x} = (A^{-1})\vec{b}$

VEJAMOS UM EXEMPLO:

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x + 3y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 19 \end{bmatrix}$

Vamos resolver $A\vec{x} = \vec{b}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 19 \end{array}\right] \Rightarrow$ resolvemos até chegar à identidade na esquerda

ou então, poderíamos calcular primeiro a inversa de A, A^{-1}, e fazer $(A^{-1})b$.

Rápido comentário que, computacionalmente, calcular a inversa é mais ineficiente. Não estou certo disso, no entanto.

QUANDO A INVERSA NÃO EXISTE

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$ não possui inversa quando uma coluna ou uma linha é uma combinação linear das outras.

$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ infinitas soluções

$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ sem solução

$\rightarrow$ impossível, inconsistente

É como dizer que $0x + 0y = 1$

Exercício em Sala

1. Use Gauss-Jordan para decidir se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é invertível e, se for, calcule A^{-1}.
2. Resolva por eliminação: $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$ e confirme com $x = A^{-1}b$.
3. Encontre k para que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ a) discuta existência/unicidade de soluções de $Ax = b$.

UNICIDADE

REDUCED ROW ECHELON FORM